

文章编号: 1000-8055(2005)06-0910-05

确定时间序列协方差函数的方法

傅惠民

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100083)

摘要: 提出一种确定时间序列协方差函数的方法, 它首先根据(多元)时间序列构造其互协方差函数随机序列、互相关函数随机序列或自协方差函数随机序列、自相关函数随机序列, 然后采用谱分析和多点平均方法对互协方差函数随机序列、互相关函数随机序列或自协方差函数随机序列、自相关函数随机序列的趋势项进行分离, 分别求得其周期项和非周期项的函数表达式, 再综合给出整个趋势项函数。从而得到原时间序列的互协方差函数、互相关函数或自协方差函数、自相关函数的函数形式, 并通过最小二乘方法确定其中的待定参数。该方法可用于时间序列协方差函数的建模、分析和预测, 并且计算简单易行、精度高, 便于实际应用。

关键词: 航空、航天推进系统; 时间序列; 多元 GARCH; 非平稳序列; 均值函数; 方差函数; 协方差函数
中图分类号: TB 301; O 211 **文献标识码:** A

Method for Determining Covariance Functions of Time Series

FU Huimin

(Research Center of Small-Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A method for determining covariance functions of time series is presented. First, it can construct a series of cross covariance, cross correlation, auto-covariance or auto-correlation function according to the time series. Then, it can determine the trend term of the cross covariance, the cross correlation, the auto-covariance or the auto-correlation function series, which obtains not only the periodic function of the trend term by the spectral analysis but also the nonperiodic function by multiple-point averaging, and synthesizes the integral function of the trend term. The functional form of the cross covariance, the cross correlation, the auto-covariance or the auto-correlation function can be derived from the trend function. Besides, its parameters are estimated by the least squares method. The presented method is credible and easily available for modeling, analysis and forecast of the covariance and the correlation function of time series.

Key words: aerospace propulsion system; time series; multivariate GARCH;
non-stationary series; mean function; variance function; covariance function

多元时间序列的协方差矩阵可用于研究各个变量的波动大小以及它们之间的相关性, 在信号处理、故障诊断、金融风险分析等领域有着广泛的

应用, 国内外对多元时间序列协方差矩阵的计算问题进行了大量研究^[1]。1982 年 Engle 提出自回归条件异方差(ARCH)模型^[2], 也因此获得 2003 年度诺贝尔奖。1986 年 Bollerslev 进一步建立广

收稿日期: 2005- 07- 11; 修订日期: 2005- 10- 18

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70531010)

作者简介: 傅惠民(1956—), 男, 浙江遂昌人, 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系“长江学者”特聘教授, 博士, 从事时间序列分析方法、先进信号处理技术、数据融合方法及小样本可靠性技术研究

义自回归条件异方差(GARCH)模型^[3]。为了解决多元 GARCH 模型参数难于准确估计的问题,后来又发展了许多简化模型,如BEEK 模型、对角多元 GARCH 模型、常相关系数多元 GARCH 模型等,但是均未能最终解决参数估计难的问题。文献[4]另辟蹊径,提出一种确定时间序列均值函数和方差函数的方法;文献[5]则给出一种确定广义时变 ARMA 模型参数函数的方法;本文进一步建立确定时间序列协方差函数的方法,该方法不但便于计算和实际应用,且适用于各种分布情况。

1 协方差函数随机序列

1.1 自协方差函数随机序列

定义 1 设 $\{X(t)\}$ 为二阶矩时间序列, $\mu(t) = E\{X(t)\}$ 和 $\sigma^2(t) = \text{Var}\{X(t)\}$ 分别为其均值函数和方差函数,则 $\{X(t)X(t+\tau)\}$ 称为序列 $\{X(t)\}$ 的自相关函数随机序列,记作 $\{R_x(t, \tau)\}$; $\{[X(t) - \mu(t)][X(t+\tau) - \mu(t+\tau)]\}$ 称为序列 $\{X(t)\}$ 的自协方差函数随机序列,记作 $\{C_x(t, \tau)\}$,其中 τ 为整数。

显然,序列 $\{R_x(t, \tau)\}$ 的趋势项等于序列 $\{X(t)\}$ 的自相关函数 $R_x(t, \tau)$,即:

$$R_x(t, \tau) = E\{R_x(t, \tau)\} = E\{X(t)X(t+\tau)\} \quad (1)$$

同样,序列 $\{C_x(t, \tau)\}$ 的趋势项等于序列 $\{X(t)\}$ 的自协方差函数 $C_x(t, \tau)$,即:

$$C_x(t, \tau) = E\{C_x(t, \tau)\} = E\{[X(t) - \mu(t)][X(t+\tau) - \mu(t+\tau)]\} \quad (2)$$

式中序列 $\{X(t)\}$ 的均值函数 $\mu(t)$ 和方差函数 $\sigma^2(t)$ 可由文献[4, 5]方法确定。

1.2 互协方差函数随机序列

定义 2 设 $\{X(t)\}$ 为向量序列(多元时间序列),其中 $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)]^T$, $\mu_i(t) = E\{X_i(t)\}$ 和 $\sigma_i^2(t) = \text{Var}\{X_i(t)\}$ 为其均值函数和方差函数,则 $\{X_i(t)X_j(t+\tau_{ij})\}$ 称为向量序列 $\{X(t)\}$ 的互相关函数随机序列,记作 $\{R_{ij}(t)\}$; $\{[X_i(t) - \mu_i(t)][X_j(t+\tau_{ij}) - \mu_j(t+\tau_{ij})]\}$ 称为向量序列 $\{X(t)\}$ 的互协方差函数随机序列,记作 $\{C_{ij}(t)\}$,其中 τ_{ij} 称为滞后时间,它可用于研究序列 $\{X_i(t)\}$ 和 $\{X_j(t)\}$ 之间产生最大影响的时间差。若取 $\tau_{ij} = 0$,则 $\{R_{ij}(t)\}$ 和 $\{C_{ij}(t)\}$ 分别为通常意义下的互相关随机序列和互协方差随机序

列, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 且 $i \neq j$ 。

同样,序列 $\{R_{ij}(t)\}$ 的趋势项等于向量序列 $\{X(t)\}$ 的互相关函数 $R_{ij}(t)$,即:

$$R_{ij}(t) = E\{R_{ij}(t)\} = E\{X_i(t)X_j(t+\tau_{ij})\} \quad (3)$$

序列 $\{C_{ij}(t)\}$ 的趋势项等于向量序列 $\{X(t)\}$ 的互协方差函数 $C_{ij}(t)$,即:

$$C_{ij}(t) = E\{C_{ij}(t)\} = E\{[X_i(t) - \mu_i(t)][X_j(t+\tau_{ij}) - \mu_j(t+\tau_{ij})]\} \quad (4)$$

式中向量序列 $\{X(t)\}$ 的均值函数 $\mu_i(t)$ 和方差函数 $\sigma_i^2(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 可由文献[4, 5]方法确定。

2 时间序列协方差函数形式的确定

设 $\hat{R}_x(t, \tau)$, $\hat{C}_x(t, \tau)$ 和 $\hat{R}_{ij}(t)$, $\hat{C}_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 分别为序列 $\{R_x(t, \tau)\}$, $\{C_x(t, \tau)\}$ 和 $\{R_{ij}(t)\}$, $\{C_{ij}(t)\}$ 的一个样本,则可采用文献[4]中方法确定序列 $\{R_x(t, \tau)\}$, $\{C_x(t, \tau)\}$ 和 $\{R_{ij}(t)\}$, $\{C_{ij}(t)\}$ 趋势项的函数形式($i, j = 1, 2, \dots, m$, 且 $i \neq j$)。下面将给出确定序列 $\{C_{ij}(t)\}$ 趋势项的具体步骤,序列 $\{R_x(t, \tau)\}$, $\{C_x(t, \tau)\}$ 和 $\{R_{ij}(t)\}$ 的趋势项也可按同样步骤确定,这里不再赘述。

2.1 确定非周期趋势项的多点平均方法

对于趋势项为非周期函数的情况,可按下面步骤确定序列 $\{C_{ij}(t)\}$ 的趋势项。

(1) 将序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 的一个样本 $\hat{C}_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 进行分段(相邻的各段之间可以部分重叠,也可采用加权平均),每段有 r 个样本值,并求其平均值:

$$\bar{t}_k = \frac{1}{r} \sum_{t=(k-1)r+1}^{kr} t \quad (5)$$

$$\bar{C}_{ijk} = \frac{1}{r} \sum_{t=(k-1)r+1}^{kr} \hat{C}_{ij}(t) \quad (6)$$

得到一组平均值数据 $(\bar{t}_k, \bar{C}_{ijk})$, $k = 1, 2, \dots, h$, 其中 h 为分段的总数, r 的大小由样本 $\hat{C}_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$ 的波动性大小而定,通常选取的 r 可为数据总量的 $1/10$, $1/20$, $1/50$ 等。

(2) 对该组平均值数据 $(\bar{t}_k, \bar{C}_{ijk})$, $k = 1, 2, \dots, h$, 进行拟合,得到拟合函数 $f(t)$,该函数即为序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 的趋势项。

2.2 确定周期趋势项的谱分析方法

对于趋势项为周期函数的情况,可采用谱分

析方法对序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 进行谱分析,从而确定序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 的周期趋势项。为了便于理解和掌握,下面给出一种简单、直观的样本周期图方法。

(1) 首先根据序列的一个样本 $\hat{C}_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 采用样本周期图^[1]计算得:

$$\hat{C}_{ij}(t) = \bar{C}_{ij} + \sum_{k=1}^M \left\{ \alpha_k \cos[\omega(t-1)] + \beta_k \sin[\omega(t-1)] \right\} \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

对于 n 为奇数情况, $M = (n-1)/2$, 式(7)中各参数由下面诸式给出:

$$\alpha_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \hat{C}_{ij}(t) \cos[\omega(t-1)] \quad (8)$$

$$\beta_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \hat{C}_{ij}(t) \sin[\omega(t-1)] \quad (9)$$

$$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (10)$$

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{C}_{ij}(t) \quad (11)$$

$$\omega = \frac{2k\pi}{n} \quad (12)$$

对于 n 为偶数情况, $M = n/2$, 当 $k = 1, 2, \dots, M-1$ 时, α_k 和 β_k 仍由式(8)和(9)计算; 当 $k=M$ 时, 则有 $\alpha_M = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} \hat{C}_{ij}(t)$, $\beta_M = 0$ 。

(2) 对于幅值序列 $A_1, A_2, \dots, A_M$ 而言, 若在某一幅值 A_l 处出现明显的波峰, 即 A_l 明显比 A_{l-1} 和 A_{l+1} 等周围的幅值大, 那么根据样本周期图可知, 频率为 ω 的周期项存在。若 α (或 β) 又明显地比 β (或 α) 大, 那么又可以进一步明确频率为 ω 的周期项是 $\alpha \cos[\omega(t-1)]$ (或 $\beta \sin[\omega(t-1)]$)。对于存在多个明显波峰的情况, 其周期项为各个波峰所对应的周期项之和 $\sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$ 。

2.3 一般趋势项的确定方法

对于一般的情况, 趋势项中往往既有非周期函数, 又有周期函数, 此时可按下面步骤确定序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 的趋势项。

(1) 采用谱分析方法对样本 $\hat{C}_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$ 进行处理, 求得序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 趋势项中周期函数 $\sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$ 。

(2) 对样本 $\hat{C}_{ij}(t) - \sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$, $t = 1, 2, \dots, n$, 采用多点平均法

求得序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 趋势项中的非周期函数 $f(t)$ 。此时, $r = \text{ent}(2\pi/\omega_{\text{hin}})$, 其中 ω_{hin} 为 ω 中的最小频率。

(3) 对样本 $\hat{C}_{ij}(t) - f(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 采用谱分析方法进行处理, 重新求得序列 $\{\bar{C}_{ij}(t)\}$ 趋势项中的周期函数 $\sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$ 。

(4) 重复步骤(2)和(3), 直到非周期函数 $f(t)$ 和周期函数 $\sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$ 中的各参数计算值稳定或满足一定的精度要求为止, 最终得到序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 趋势项的函数形式 $f(t) + \sum \left\{ \alpha \cos[\omega(t-1)] + \beta \sin[\omega(t-1)] \right\}$ 。

3 互协方差函数的确定

设 $C_{ij}(c_{ij}, t)$ 为根据上述方法得到的向量序列 $X(t)$ 互协方差函数 $C_{ij}(t)$ 的函数形式, 其中 $c_{ij} = (c_{ij0}, c_{ij1}, \dots, c_{ijh_{ij}})^T$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 且 $i \neq j$ 。那么可由下面诸式求得待定参数 $c_{ij} = (c_{ij0}, c_{ij1}, \dots, c_{ijh_{ij}})^T$

$$\partial Q_{ij} / \partial c_{ij} = 0 \quad (13)$$

式中

$$Q_{ij} = \sum_{t=1}^n \left\{ \hat{C}_{ij}(t) - C_{ij}(c_{ij}, t) \right\}^2 \quad (14)$$

若 $C_{ij}(c_{ij}, t)$ 具有如下函数形式:

$$C_{ij}(c_{ij}, t) = \sum_{k=0}^{h_{ij}} c_{ijk} \lambda_{jk}(t) \quad (15)$$

式中 $\lambda_{j0}(t) = 1$, $\lambda_{jk}(t)$ 为已知函数, $k = 1, 2, \dots, h_{ij}$ 。那么根据式(13)可以求得待定参数 $c_{ij} = (c_{ij0}, c_{ij1}, \dots, c_{ijh_{ij}})^T$ 为:

$$c_{ij0} = \bar{C}_{ij} - \sum_{k=1}^{h_{ij}} c_{ijk} \bar{\lambda}_{jk} \quad (16)$$

$$(c_{ij1}, c_{ij2}, \dots, c_{ijh_{ij}})^T = L_{ij}^{-1} L_{ij\lambda} \quad (17)$$

式中

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{C}_{ij}(t) \quad (18)$$

$$\bar{\lambda}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \lambda_{jk}(t) \quad k = 1, 2, \dots, h_{ij} \quad (19)$$

$$L_{ij} = (l_{ijkl})_{h_{ij} \times h_{ij}} \quad (20)$$

$$l_{ijkl} = \sum_{t=1}^n [\lambda_{jk}(t) - \bar{\lambda}_{jk}] [\lambda_{jl}(t) - \bar{\lambda}_{jl}] \quad k, l = 1, 2, \dots, h_{ij} \quad (21)$$

$$L_{ij\lambda} = (l_{ij1}, l_{ij2}, \dots, l_{ijh_{ij}})^T \quad (22)$$

$$l_{ijk} = \sum_{t=1}^n [\hat{C}_{ij}(t) - \bar{C}_{ij}] [\lambda_{jk}(t) - \bar{\lambda}_{jk}] \quad (23)$$

$$k = 1, 2, \dots, h_{ij}$$

根据向量序列 $\{X(t)\}$ 互协方差函数 $C_{ij}(c_{ij}, t)$ 可以进一步求得互相关系数函数 $\rho_{ij}(t)$ 为:

$$\rho_{ij}(t) = \frac{C_{ij}(c_{ij}, t)}{\sigma_i(t)\sigma_j(t + \tau_{ij})} \quad (24)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m, \text{ 且 } i \neq j$$

4 互相关函数的确定

设 $R_{ij}(c_{ij}^*, t)$ 为根据第 2 节方法得到的向量序列 $\{X(t)\}$ 互相关函数 $R_{ij}(t)$ 的函数形式, $i, j = 1, 2, \dots, m$, 那么待定参数 $c_{ij}^* = (c_{ij0}^*, c_{ij1}^*, \dots, c_{ijh_{ij}}^*)^T$ 可由下面诸式求得:

$$\partial Q_{ij}^* / \partial c_{ij}^* = 0 \quad (25)$$

式中

$$Q_{ij}^* = \sum_{t=1}^n \left\{ \hat{R}_{ij}(t) - R_{ij}(c_{ij}^*, t) \right\}^2 \quad (26)$$

若 $R_{ij}(c_{ij}^*, t)$ 具有如下函数形式:

$$R_{ij}(c_{ij}^*, t) = \sum_{k=0}^{h_{ij}} c_{ijk}^* \lambda_{jk}^*(t) \quad (27)$$

式中 $\lambda_{j0}^*(t) = 1$, $\lambda_{jk}^*(t)$ 为已知函数, $k = 1, 2, \dots, h_{ij}$. 那么根据式 (25) 可以求得待定参数 $c_{ij}^* = (c_{ij0}^*, c_{ij1}^*, \dots, c_{ijh_{ij}}^*)^T$ 为:

$$c_{ij0}^* = \bar{R}_{ij} - \sum_{k=1}^{h_{ij}} c_{ijk}^* \bar{\lambda}_{jk} \quad (28)$$

$$(c_{ij1}^*, c_{ij2}^*, \dots, c_{ijh_{ij}}^*)^T = L_{ij}^{-1} L_{ij\lambda} \quad (29)$$

式中

$$\bar{R}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{R}_{ij}(t) \quad (30)$$

$$\bar{\lambda}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \lambda_{jk}^*(t) \quad k = 1, 2, \dots, h_{ij} \quad (31)$$

$$L_{ij} = (l_{ijk})_{h_{ij} \times h_{ij}} \quad (32)$$

$$l_{ijkl} = \sum_{t=1}^n [\lambda_{jk}^*(t) - \bar{\lambda}_{jk}] [\lambda_{il}^*(t) - \bar{\lambda}_{il}] \quad (33)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, h_{ij}$$

$$L_{ij\lambda} = (l_{ij1}, l_{ij2}, \dots, l_{ijh_{ij}})^T \quad (34)$$

$$l_{ijk} = \sum_{t=1}^n [\hat{R}_{ij}(t) - \bar{R}_{ij}] [\lambda_{jk}^*(t) - \bar{\lambda}_{jk}] \quad (35)$$

$$k = 1, 2, \dots, h_{ij}$$

5 自协方差函数的确定

设 $C_X(c_\tau, t, \tau)$ 为根据第 2 节方法得到的序列 $\{X(t)\}$ 自协方差函数 $C_X(t, \tau)$ 的函数形式, 其中 $c_\tau = (c_{\tau 0}, c_{\tau 1}, \dots, c_{\tau h_\tau})^T$, $\tau = 1, 2, \dots$. 那么可由下面诸式求得待定参数 $c_\tau = (c_{\tau 0}, c_{\tau 1}, \dots, c_{\tau h_\tau})^T$

$$\partial Q_\tau / \partial c_\tau = 0 \quad (36)$$

式中

$$Q_\tau = \sum_{t=1}^n \left\{ \hat{C}_X(t, \tau) - C_X(c_\tau, t, \tau) \right\}^2 \quad (37)$$

若 $C_X(c_\tau, t, \tau)$ 具有如下函数形式:

$$C_X(c_\tau, t, \tau) = \sum_{k=0}^{h_\tau} c_{\tau k} \lambda_{\tau k}(t) \quad (38)$$

式中 $\lambda_{\tau 0}(t) = 1$, $\lambda_{\tau k}(t)$ 为已知函数, $k = 1, 2, \dots, h_\tau$. 那么根据式 (36) 可以求得待定参数 $c_\tau = (c_{\tau 0}, c_{\tau 1}, \dots, c_{\tau h_\tau})^T$ 为:

$$c_{\tau 0} = \bar{C}_\tau - \sum_{k=1}^{h_\tau} c_{\tau k} \bar{\lambda}_{\tau k} \quad (39)$$

$$(c_{\tau 1}, c_{\tau 2}, \dots, c_{\tau h_\tau})^T = L_\tau^{-1} L_{\tau\lambda} \quad (40)$$

式中

$$\bar{C}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{C}_X(t, \tau) \quad (41)$$

$$\bar{\lambda}_{\tau k} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \lambda_{\tau k}(t) \quad k = 1, 2, \dots, h_\tau \quad (42)$$

$$L_\tau = (l_{\tau kl})_{h_\tau \times h_\tau} \quad (43)$$

$$l_{\tau kl} = \sum_{t=1}^n [\lambda_{\tau k}(t) - \bar{\lambda}_{\tau k}] [\lambda_{\tau l}(t) - \bar{\lambda}_{\tau l}] \quad (44)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, h_\tau$$

$$L_{\tau\lambda} = (l_{\tau 1}, l_{\tau 2}, \dots, l_{\tau h_\tau})^T \quad (45)$$

$$l_{\tau k} = \sum_{t=1}^n [\hat{C}_X(t, \tau) - \bar{C}_\tau] [\lambda_{\tau k}(t) - \bar{\lambda}_{\tau k}] \quad (46)$$

$$k = 1, 2, \dots, h_\tau$$

由序列 $\{X(t)\}$ 自协方差函数 $C_X(c_\tau, t, \tau)$ 可以进一步求得自相关系数函数 $\rho_X(t, \tau)$ 为:

$$\rho_X(t, \tau) = \frac{C_X(c_\tau, t, \tau)}{\sigma(t)\sigma(t + \tau)} \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (47)$$

6 自相关函数的确定

设 $R_X(c_\tau^*, t, \tau)$ 为根据第 2 节方法得到的序列 $\{X(t)\}$ 自相关函数 $R_X(t, \tau)$ 的函数形式, $\tau = 0, 1, 2, \dots$. 那么待定参数 $c_\tau^* = (c_{\tau 0}^*, c_{\tau 1}^*, \dots, c_{\tau h_\tau}^*)^T$ 可由下面诸式求得:

$$\partial Q_\tau^* / \partial c_\tau^* = 0 \quad (48)$$

式中

$$Q_{\tau}^* = \sum_{t=1}^n \left\{ \hat{R}_X(t, \tau) - R_X(c_{\tau}^*, t, \tau) \right\}^2 \quad (49)$$

若 $R_X(c_{\tau}^*, t, \tau)$ 具有如下函数形式:

$$R_X(c_{\tau}^*, t, \tau) = \sum_{k=1}^{h_{\tau}^*} c_{\tau k}^* \lambda_{\tau k}^*(t) \quad (50)$$

式中 $\lambda_{\tau 0}^*(t) = 1$, $\lambda_{\tau k}^*(t)$ 为已知函数, $k = 1, 2, \dots, h_{\tau}^*$ 。那么根据式(48)可以求得待定参数 $c_{\tau}^* = (c_{\tau 0}^*, c_{\tau 1}^*, \dots, c_{\tau h_{\tau}^*}^*)^T$ 为:

$$c_{\tau 0}^* = \bar{R}_{\tau} - \sum_{k=1}^{h_{\tau}^*} c_{\tau k}^* \bar{\lambda}_{\tau k} \quad (51)$$

$$(c_{\tau 1}^*, c_{\tau 2}^*, \dots, c_{\tau h_{\tau}^*}^*)^T = L_{\tau}^{-1} L_{\tau \lambda} \quad (52)$$

式中

$$\bar{R}_{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{R}_X(t, \tau) \quad (53)$$

$$\bar{\lambda}_{\tau k} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \lambda_{\tau k}^*(t) \quad k = 1, 2, \dots, h_{\tau}^* \quad (54)$$

$$L_{\tau} = (l_{\tau k l})_{h_{\tau}^* \times h_{\tau}^*} \quad (55)$$

$$l_{\tau k l} = \sum_{t=1}^n \left[\lambda_{\tau k}^*(t) - \bar{\lambda}_{\tau k} \right] \left[\lambda_{\tau l}^*(t) - \bar{\lambda}_{\tau l} \right] \quad k, l = 1, 2, \dots, h_{\tau}^* \quad (56)$$

$$L_{\tau \lambda} = (l_{\tau 1}, l_{\tau 2}, \dots, l_{\tau h_{\tau}^*})^T \quad (57)$$

$$l_{\tau k} = \sum_{t=1}^n \left[\hat{R}_X(t, \tau) - \bar{R}_{\tau} \right] \left[\lambda_{\tau k}^*(t) - \bar{\lambda}_{\tau k} \right] \quad k = 1, 2, \dots, h_{\tau}^* \quad (58)$$

7 向量序列条件协方差矩阵

定义 3 设 $\{X(t)\}$ 为向量序列, 其中 $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)]^T$, $\mu_i(t) = E\{X_i(t)\}$ 和 $\sigma_i^2(t) = \sigma_{i i}^2(t) = \text{Var}\{X_i(t)\}$ 分别为其均值函数和方差函数, 若 $\{Y(t)\}$ 为协方差平稳向量序列^[1], 其中 $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t)]^T$, $Y_i(t) = [X_i(t) - \mu_i(t)]/I_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $\{X(t)\}$ 称为相关系数平稳向量序列。

由文献[1]可知, 协方差平稳向量序列 $\{Y(t)\}$ 可表示为:

$$Y(t) = \Phi_1 Y(t-1) + \Phi_2 Y(t-2) + \dots + \Phi_p Y(t-p) + \epsilon - \Theta_1 \epsilon_{-1} - \dots - \Theta_q \epsilon_{-q} \quad (59)$$

式中 Φ_i 是自回归系数 $m \times m$ 矩阵, $i = 1, 2, \dots, p$; Θ_i 是滑动平均系数 $m \times m$ 矩阵, $i = 1, 2, \dots, q$; ϵ 是 $m \times 1$ 白噪声向量;

$$E(\epsilon) = 0 \quad (60)$$

$$E[\epsilon \epsilon_{-k}^T] = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \Omega & k = 0 \end{cases} \quad (61)$$

其中 $\Omega = \{\sigma_{\epsilon i j}\}_{m \times m}$ 为对称正定矩阵。

对于向量序列 $\{X(t)\}$ 的一个样本 $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 首先可由文献[4, 5]求得 $\mu_i(t)$ 和 $I_i(t)$, 并通过变换 $Y_i(t) = [X_i(t) - \mu_i(t)]/I_i(t)$, 得到协方差平稳向量序列 $\{Y(t)\}$ 的一个样本 $Y(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 然后再根据文献[1]方法求得 Ω 。可以证明, 向量序列 $\{X(t)\}$ 在前 n 个观测值 $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$, 已知条件下的协方差矩阵 Σ 由下式给出:

$$\Sigma = \{I_i(t) I_j(t) \sigma_{\epsilon i j}\}_{m \times m} \quad (62)$$

8 结 论

(1) 均值随机序列 $\{\hat{\mu}(t)\} = \{X(t)\}$ 、方差随机序列 $\{\hat{\sigma}^2(t)\} = \{[X(t) - \mu(t)]^2\}$ 、标准差随机序列 $\{\hat{\sigma}(t)\} = c_1 \{|X(t) - \mu(t)|\}$ 或 $c_2 \{|X(t+1) - X(t) - \mu(t+1) + \mu(t)|\}$ ^[4]、自协方差函数随机序列 $\{\hat{C}_X(t, \tau)\}$ 、自相关函数随机序列 $\{\hat{R}_X(t, \tau)\}$ 、互协方差函数随机序列 $\{\hat{C}_{ij}(t)\}$ 、互相关函数随机序列 $\{\hat{R}_{ij}(t)\}$ 等随机序列的样本均值和样本方差是重要的特征量, 它们在故障诊断、金融风险评估等领域有广泛应用。

(2) 与多元 GARCH 模型相比, 式(62)给出的条件协方差矩阵更加精确, 且计算更加简单, 便于实际应用。

参考文献

- [1] James D Hamilton. Time Series Analysis[M]. Princeton University Press, 1994
- [2] Engle R F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation[J]. *Econometrica*, 1982, 50: 987~1008
- [3] Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity[J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31: 307~327
- [4] 傅惠民, 刘成瑞, 马小兵. 时间序列均值和方差函数的确定方法[J]. *机械强度*, 2004, 26(2): 164~169
FU Huimin, LIU Cheng-rui, MA Xiao-bing. Method for Determining Functions of Time Series Mean and Variance[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2004, 26(2): 164~169
- [5] 傅惠民, 王治华. 广义时变 ARMA 模型参数函数的确定方法[J]. *机械强度*, 2004, 26(6): 636~641
FU Huimin, WANG Zhi-hua. Method for Determining Parametric Functions of Generalized Time-Varying ARMA Model[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2004, 26(6): 636~641